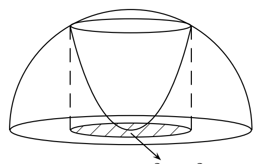
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
CAMPUS SANTIAGO

Problemas resueltos - Mate 4

Problema 1.
Encuentre el volumen del cuerpo limitado por las superficies: $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$.

Solución:



$$\left.\begin{array}{rcl} z & = & x^2 + y^2 \\ z & = & 2 - x^2 - y^2 \end{array}\right| \Longrightarrow x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2 \Longrightarrow 2\left(x^2 + y^2\right) = 2 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Calculando en coordenadas cilíndricas:

$$V = 4 \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_{r^2}^{2-r^2} r \; dz \, d\theta \, dr$$

$$= 4 \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \left(r(2 - r^2) - r \cdot r^2 \right) \, d\theta \, dr$$

$$= 4 \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \left(2r - 2r^3 \right) d\theta \, dr$$

$$= 4 \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(2r - 2r^3 \right) dr$$

$$= 2\pi \left(r^2 - \frac{r^4}{2} \right) \Bigg|_0^1 = \pi$$

Problema 2. Calcular el volumen de la región determinada por los planos $x = 0$, $y = x$ y la superficie $z^2 = 1 - y^2$.

Solución:

En coordenadas rectangulares el volumen queda:

$$\mathrm{V} = 4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{y} \mathrm{dx}\,\mathrm{dz}\,\mathrm{dy} = 4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} y\,\mathrm{dz}\,\mathrm{dy} = 4\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{dy} = \frac{4}{3}$$

Pasando a coordenadas cilindricas en las variables y y z:

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= r\cos\theta \\ z &= r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}$$

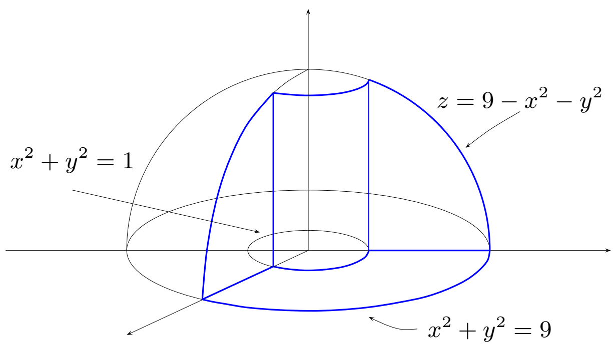
Con $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ y $0 \leq x \leq r\cos\theta$. Observar que con esa variación de θ el volumen queda:

$$\mathrm{V} = 4\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r\cos\theta} r\,\mathrm{dx}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{dr} = 4\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{dr} = 4\left(\int_0^1 r^2\,\mathrm{dr}\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{4}{3}$$

Problema 3.

Hallar el volumen del sólido R, determinado por las ecuaciones $x^2 + y^2 \geq 1$ y $0 \leq z \leq 9 - x^2 - y^2$.

Solución



$$V = 4 \int_1^3 \int_0^{\pi/2} \int_0^{9-r^2} r\, dz\, d\theta\, dr = 4 \int_1^3 \int_0^{\pi/2} r(9 - r^2)\, d\theta\, dr$$

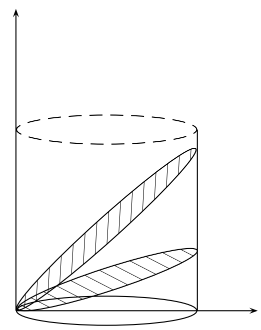
$$= 4 \cdot \frac{\pi}{2} \int_1^3 \left(9r - r^3\right) dr = 2\pi \left(\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_1^3$$

$$= 2\pi \left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4} - \frac{9}{2} + \frac{1}{4} \right) \; = \; 32\pi$$

Problema 4.
Calcular el volumen del sólido acotado por las superficies $x^2 + y^2 = 2x$, $z = x$ y $z = 2x$.

Solución:

Integrando sobre el disco $x^2 + y^2 \leq 2x$ y pasando a coordenadas polares.



$$V = \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 2x} (2x - x)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r \cdot r\cos\theta\, dr\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{r^3}{3} \Big|_0^{2\cos\theta} \right) \cdot \cos\theta\, d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{8}{3} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{16}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = \pi$$

Nota: El resultado es el mismo si se hace con integrales triples y se pasa a coordenadas cilíndricas.

Problema 5.
Calcular la integral

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}}{(1+x^2+y^2)^2}$$

donde $\mathcal{R}$ es la región interior a un bucle de la lemniscata $(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$

Solución:

La ecuación del lazo derecho de la lemniscata, en coordenadas polares, es $r = \sqrt{\cos 2\theta}$ con $-\dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$.
Luego la integral en coordenadas polares queda:

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{R}} \frac{\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}}{(1+x^2+y^2)^2} &= 2\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} \frac{r}{(1+r^2)^2}\,dr\,d\theta \\
&= -\int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{1+r^2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta \\
&= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{1+\cos 2\theta} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+\cos u} \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Problema 6. Considerar $\mathcal{S}$ la parte de la esfera $x^2+y^2+z^2 \leq 16a^2$ con $a \leq z \leq 2a$ y $x, y > 0$. Determine la masa de $\mathcal{S}$ si la densidad de masa en un punto es $\rho(x,y,z) = x^2+y^2$

Solución:

Intersección de la esfera con el plano $z = a$: $x^2+y^2 = 15a^2$.

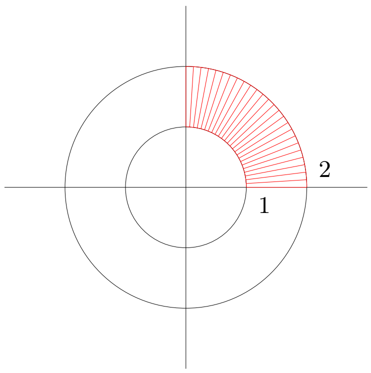
Intersección de la esfera con el plano $z = 2a$: $x^2+y^2 = 12a^2$.

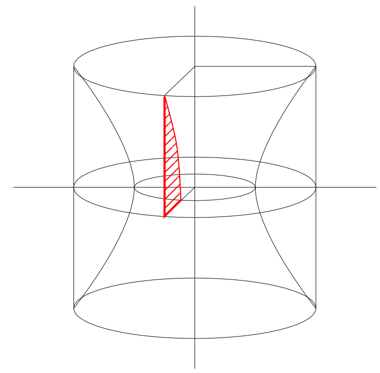
Usando coordenadas cilindricas, la masa queda:

$$
\begin{aligned}
\text{m} &= \int_0^{\sqrt{12}a}\int_0^{\pi/2}\int_a^{2a} r^2 \cdot r\, dz\, d\theta\, dr + \int_{\sqrt{12}a}^{\sqrt{15}a}\int_0^{\pi/2}\int_a^{\sqrt{16a^2-r^2}} r^2 \cdot r\, dz\, d\theta\, dr \\
&= \frac{a\pi}{2}\int_0^{\sqrt{12}a} r^3\, dr - \frac{a\pi}{2}\int_{\sqrt{12}a}^{\sqrt{15}a} r^3\, dr + \frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{12}a}^{\sqrt{15}a} r^3\sqrt{16a^2-r^2}\, dr \\
&= \frac{144a^5}{8}\pi - \frac{81a^5}{8}\pi + \frac{267a^5}{30}\pi \\
&= \frac{2813}{120}a^5\pi
\end{aligned}
$$

Problema 7.
Hallar el volumen del sólido S, acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Solución





$$V = 2 \cdot 4 \int_1^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{r^2-1}} r \, dz \, d\theta \, dr$$

$$= 8 \left(\frac{\pi}{2}\right) \int_1^2 r\sqrt{r^2-1}\, dr$$

$$= 4\pi \frac{1}{\cancel{2}} (r^1 - 1)^{3/2} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \Bigg|_1^2$$

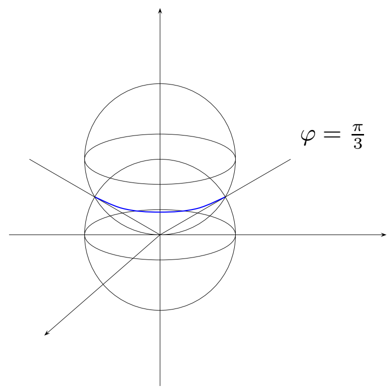
$$= \frac{4\pi}{3}(3^{3/2} - 0) = \frac{4\pi}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\,\pi$$

Problema 8.
Calcular

$$\iiint\limits_{\mathcal{R}} z^2 \, dV,$$

donde $\mathcal{R}$ es la parte común de las esferas $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$ y $x^2+y^2+z^2 \leq 2az$.

Solución



Observar que la intersección de las dos esferas se produce cuando $z = \frac{a}{2}$ y corresponde a puntos con ángulo $\varphi = \frac{\pi}{3}$ respecto del eje z y distancia $\rho = a$.

En coordenadas esféricas la integral se debe separar en dos regiones. Para $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ se tiene que $0 \leq \rho \leq a$ y $\frac{\pi}{3} \leq q\varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\iiint\limits_{\mathcal{R}} z^2 \, dV = 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/3} \int_0^{a} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, \rho^2 \cos^2\varphi \; d\rho \, d\varphi \, d\theta + 4 \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_0^{2a\cos\varphi} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, \rho^2 \cos^2\varphi \; d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$= 4\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(\int_0^{\pi/3} \cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \right) \left(\int_0^{a} \rho^4 \, d\rho \right) + 4 \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi \; \left. \frac{\rho^5}{5} \right|_0^{2a\cos\varphi} d\varphi \, d\theta$$

$$= -2\pi \left(\left. \frac{\cos^3\varphi}{3} \right|_0^{\pi/3} \right) \frac{a^5}{5} + 4\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{32a^5}{5} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^7\varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi \quad = \quad \frac{59\pi a^5}{480}$$

En coordenadas cilíndricas

$$\iiint\limits_{\mathcal{R}} z^2\, dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{r/2}\int_0^{-\sqrt{2rz-z^2}} rz^2\, dr\, dz\, d\theta + 4\int_0^{\pi/2}\int_{r/2}^{r}\int_0^{\sqrt{r^2-z^2}}$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{r/2} \frac{1}{2}(2rz - z^2)\, z^2\, dz\, d\theta + 4\int_0^{\pi/2}\int_{r/2}^{R} z^2(r^2 - z^2)\cdot\frac{1}{2}\, dz\, d\theta$$

$$= 4\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\int_0^{r/2}(2rz^3 - z^4)\, dz + 4\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\int_{r/2}^{r}(r^2z^2 - z^4)\, dz$$

$$= \pi\left(\frac{\cancel{2}rz^4}{\cancel{4}\,2} - \frac{z^5}{5}\right)\Bigg|_0^{r/2} + \pi\left(\frac{r^2z^3}{3} - \frac{z^5}{5}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{r^5}{32} - \frac{R^5}{160}\right) + \pi\left(\frac{r^5}{3} - \frac{R^5}{5} - \frac{R^5}{24} + \frac{R^5}{160}\right) \quad = \quad \frac{59\pi R^5}{480}$$

Problema 9.

Calcular

$$\iiint\limits_{\mathcal{R}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dV$$

donde $\mathcal{R}$ es el interior de la esfera $x^2+y^2+z^2 = x$.

Solución

Observar que:

$$x^2+y^2+z^2 = x \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Se trata de una esfera con centro en $\left(\frac{1}{2}\,,\,0\,,\,0\right)$ y radio $r = \frac{1}{2}$. En coordenadas esféricas queda: $\rho = \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)$. Se tiene:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leq & \theta & \leq & \frac{\pi}{2} \qquad (\times\, 4\,) \\ 0 & \leq & \phi & \leq & \frac{\pi}{2} \\ 0 & \leq & \rho & \leq & \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi) \end{array}$$

Luego la integral queda

$$\iiint\limits_{\mathcal{R}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dV = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)} \rho\cdot\rho^2\,\mathrm{sen}(\phi)\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\phi)} \mathrm{sen}(\phi)\,d\phi\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(\theta)\,\mathrm{sen}^5(\phi)\,d\phi\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(\theta)\,d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}^5(\phi)\,d\phi \quad = \quad \frac{\pi}{10}$$